Cálculo Diferencial - Derivadas e Aplicações

Sugestões para a Resolução

Exercício 1.
alínea a) Escrever a função sob a forma de potência
alínea c) Usar as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão antes de calcular a derivada.

Recordemos a equação de uma recta

$$y = mx + b \tag{1}$$

No caso das rectas tangentes e normal a uma curva no ponto (x_0, y_0) temos (acetatos, pág 4 e 5) para a recta tangente

$$y = m_{tg}(x - x_0) + y_0 \tag{2}$$

com

$$m_{tg} = f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \tag{3}$$

e da recta normal

$$y = m_n(x - x_0) + y_0 \tag{4}$$

com

$$m_n = -\frac{1}{m_{tg}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \tag{5}$$

Para a sua determinação é necessário ter conhecimento
- da abcissa x_0 e da ordenada y_0 do ponto de tangência
- do declive da recta, que se obtém a partir da derivada da função no ponto de tangência

Exercício 2.
Conhecemos a abcissa do ponto x_0, portanto basta simplesmente calcular $y_0 = f(x_0)$ e $f'(x_0)$, e utilizar as igualdades (2) a (5) para escrever as equações da rectas.

Exercício 3.
Conhecemos a ordenada do ponto y_0, pelo que, para determinar x_0, teremos que resolver a igualdade $y_0 = f(x_0)$ em ordem a x_0. Em sequida basta simplesmente calcular $f'(x_0)$, e utilizar as igualdades (2) a (5) para escrever as equações da rectas.

Exercício 5.
Pretende-se que a recta tangente e a recta $y + 3x + 4 = 0$ sejam paralelas, ou sejam, que tenham o mesmo declive. Para determinar o declive da recta $y + 3x + 4 = 0$ resolvemos a sua equação em odem a y e identificamos o coeficiente de x. Este será o declive da tangente m_{tg}, que coincide com a derivada $f'(x_0)$, em que x_0 é desconhecido. Resolvemos a equação $m_{tg} = f'(x_0)$ em ordem a x_0, obtendo assim o seu valor. Em seguida calculamos a ordenada y_0, obtendo assim as coordenadas do ponto de tangência.

Exercícios 8. e 9.
Calcular todas as derivadas sem ter qualquer preocupação com a composta. Usar as fórmulas nas páginas 9 e 10 dos acetatos.

Exercício 10.
A resolução é análoga à do exemplo na página 14 dos acetatos. Calcular a derivada da função $f(x)$. Calcular a inversa da função f, resolvendo $y = f(x)$ em ordem a x. Usar a fórmula na página 12.

Exercício 11.
Calcular todas as derivadas sem ter qualquer preocupação com a paramétrica. Usar a fórmula na página 20 dos acetatos.

Exercício 12.
Sabemos que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ (página 22 dos acetatos). Uma vez que $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$, basta derivas f duas vezes.

Exercício 13.
Sabemos que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ (página 22 dos acetatos).
Como se trata de uma função paramétrica, tal como para o cálculo da primeira derivada (ver página 20 dos acetatos), temos que usar os teoremas das derivadas da funções composta e inversa. Temos então

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{derivada da 1ª derivada}} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

Exercício 14.
Usar as fórmulas na página 24 dos acetatos.

Exercício 15.
Como estimativa para erro propagado pode usar-se a diferencial.

Exercícios 16. e 17.
Usar a fórmula na página 25 dos acetatos. Analisar a resolução do exemplo nas páginas 27 e 28. Adaptar a referida resolução de forma a resolver este problema.

Exercício 18.
alínea c) $z = h(x)$ é uma função composta pelo que deve ser calculada a derivada $\dfrac{dz}{dx}$ usando o teorema da derivada da função composta. Em seguida deve ser indicada a diferencial que é $dz = \dfrac{dz}{dx}\,dx$